Invariant Subspaces of Shift Operators of Arbitrary Multiplicity (Operator Algebras and Their Applications)

河村, 新蔵

数理解析研究所講究録
398巻 1980年 98-110

$= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ 固定 $S \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ $S(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_{n+1}$

$\mathcal{U}(\mathcal{H}) \supset \mathfrak{S} = \{$シフト作用素$\} \supset \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{S}} = \mathfrak{M}$.

$H = \{$斉次作用素$\} \supset \mathcal{S} \cdot S^*$

Invariant Subspaces of Shift Operators of Arbitrary Multiplicity

山形大 理学部 河村新蔵

$\{\mathfrak{K}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$を次元の同じヒルベルト空間の族とし、$\mathfrak{H} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\oplus} \mathfrak{K}_n$ とする。$\mathfrak{H}$上のユニタリ作用素 U が $U\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_{n+1}$ という性質を持つ時、U をシフト作用素という。一つのシフト作用素 S を固定して考え、$\mathfrak{K}_0$ と $\mathfrak{K}_n$ を S^n によって同一視し、$\mathfrak{K}_n$ を全て $\mathfrak{K}$ のコピーと考える。この同一視によって S は $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (\eta_n = \xi_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ といういわゆるシフト作用素となる。一般のシフト作用素 U を $U = WS$ ($W = US^*$) と表現すれば W は $W\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_n$ なるユニタリ作用素となる。$\mathfrak{K}_n$ は $\mathfrak{K}$ のコピーであるので、W の $\mathfrak{K}_n$ への制限, U_nは $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素と見る事ができる。$\mathfrak{S}$ をシフト作用素全体としよう。$\mathfrak{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して $W(\mathcal{S}, S) = \{W \mid W = US^*, U \in \mathcal{S}\}$ とする。我々の目標は $\mathcal{S}$ による不変部分空間 $\mathfrak{M}$ の構造を $\mathcal{S}$ との関係、即ち $W(\mathcal{S})$ との関係に於て研究する事である。この稿はその第一段階である。

任意に与えられた $\mathcal{S}\subset\mathfrak{S}$ に対して $\mathcal{S}$ はシフト作用素 S
を含んでいると仮定して良い事をみてみよう。$\mathcal{S}$ の中から
勝手にシフト作用素 U を選んできて $W=US^*$ とする。W $\mathcal{S}\ni U$
$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus u_n$ (u_n は $\mathfrak{K}_n$ 上のユニタリ作用素)と書ける。ここで $\mathcal{S}\cdot S^*\ni US^*$ $H\ni W$
次の様に $\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素 $V=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus v_n$ を定義する。$W=\sum_n\oplus U_n$
$v_n=u_nu_{n-1}\cdots u_1\ (n\geq 1)$, $v_0=1$, $v_n=u_{n+1}^*u_{n+2}^*\cdots u_0^*\ (n\leq -1)$
$v_n^*u_nv_n=u_1^*\cdots u_n^*u_nu_n\cdots u_1$
この時 $V^*UV=S$, 従って $\mathcal{S}'=V^*\mathcal{S}V$ は S を含む。$\mathcal{S}\mathfrak{M}$
$\subset\mathfrak{M}$ である事と $\mathcal{S}'V^*\mathfrak{M}\subset V^*\mathfrak{M}$ である事は同値であるか
ら、$\mathcal{S}$ の不変部分空間の代りに $\mathcal{S}'$ の不変部分空間を調べ
れば良いという事になる。$\mathcal{S}=\{S\}$ の場合については、
Halmos [1], Helson [2] の研究が基本的である。

1. $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{H}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus\mathfrak{K}_n$ の(閉)部分空間としよう。$\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$
の不変部分空間($\mathcal{S}$-不変)であるとは $\mathcal{S}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ となる事で
ある。ここで $\mathcal{S}\mathfrak{M}=\{Ux\mid U\in\mathcal{S},\ x\in\mathfrak{M}\}$ とし、$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]$ を
$\mathcal{S}\mathfrak{M}$ の線型閉包とする。$\mathfrak{M}$ が reducing な不変部分空間
であるとは、$\mathcal{S}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ かつ $\mathcal{S}^*\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ となる事である。
$\mathcal{S}$ に対し $M(\mathcal{S})$ として $\mathcal{S}$ から生成される von Neumann
環とする。この時次の事が成り立つ。 $\mathcal{U}(\mathcal{H})\supset\mathfrak{S}\supset\mathcal{S}\Rightarrow M(\mathcal{S})$

<u>1-1 命題</u> $\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ の reducing な不変部分空間である
事と commutant $M(\mathcal{S})'$ の適当な射影子 P に対して $\mathfrak{M}=P\mathfrak{H}$
となる事は同値である。

ここでどの様な von Neumann 環 $M(\mathcal{S})$ が現われるか考えてみよう。

<u>1-2, 例</u>. $\mathbb{T}$ を1次元トーラスとし，$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathfrak{K}$ とする。$\mathfrak{K}_n = e_n \otimes \mathfrak{K}$ $(e_n(z) = z^n)$ となる。S を $L^2(\mathbb{T})$ 上の通常のシフト作用素、即ち $S : \sum \xi_n e_n \longrightarrow \sum \xi_{n-1} e_n$ とする。A を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素のある集合とする。$\mathcal{S} = S \otimes A$ は $\mathfrak{H}$ 上のシフト作用素の族で，$M(\mathcal{S}) = L^\infty(\mathbb{T}) \otimes M$ となる。ここで M は A から生成された $\mathfrak{K}$ 上の von Neumann 環である。又 $W(\mathcal{S}) = 1 \otimes A$ で $S^* W(\mathcal{S}) S = W(\mathcal{S})$ である。

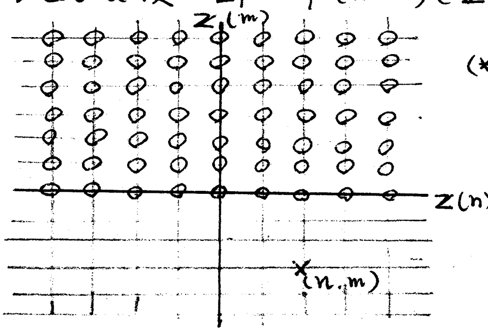
<u>1-3, 例</u>. α を $B(\mathfrak{K})$ 上の $*$-同型写像とする。A を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素の集合とする。$\mathcal{S} = \{U = WS \mid W = \sum \oplus u_n,\ u_n = \alpha^n(u_0)\ u_0 \in A\}$ とする。M を $\{\alpha^n(u_0) \mid u_0 \in A, n \in \mathbb{Z}\}$ から生成される von Neumann 環とすれば $M(\mathcal{S}) = W^*(M, \alpha)$ (M と α によって決定される $\mathfrak{H} = \sum \oplus \mathfrak{K}_n$ 上の接合積である。

<u>1-4, 例</u>. $\mathcal{S} = \mathfrak{S}$ とすれば $M(\mathcal{S}) = B(\mathfrak{H})$ である。

$\mathfrak{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間とする時，$[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$ であるが，この時 $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]$ には $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$ であるか又は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ という二つの可能性が考えられる。$\mathfrak{M}$ が *reducing* な部分空間であれば $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ であるが、問題は $\mathfrak{M}$ が *non-reducing* である時に $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$ となるかという事である。

次の例によって $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$ なる non-reducing $\mathcal{S}$-不変部分空間の存在を示そう。

__1-5, 例__ $\mathfrak{H}=L^2(\mathbb{T})\otimes L^2(\mathbb{T})$, $\mathcal{S}=\{S\otimes 1, S\otimes S\}$ $\mathfrak{M}=\{f\in\mathfrak{H} \mid \hat{f}(n,m)=0,\ (n,m)\notin L_1\}$ ここで $\hat{f}$ は f の Fourier 変換 $L_1=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid m\geq 0\}$ を表わす。



(*) (n,m) は $e^{in\theta}e^{im\theta}\in L^2(\mathbb{T}^2)$ で張られる1次元ベクトル空間と考える。

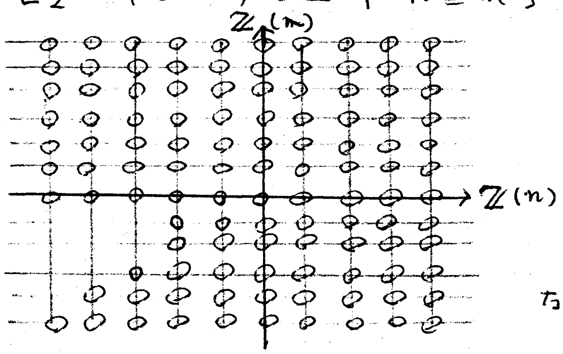
__1-6, 例__ $\mathfrak{H}=L^2(\mathbb{T})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus[e_n]$, $\mathcal{S}=\{U=WS \mid W=\sum\oplus u_n$ $u_n=1\ (n<0)$ $u_n=1$ 又は -1 $(n\geq 0)\}$ $f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}e_{-n}$ $\in\mathfrak{H}$ に対して $\mathfrak{M}=[f]\oplus H^2$ $(H^2=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus[e_n])$ とする。

$\mathcal{S}\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ を示してみよう。$\mathcal{S}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ は明らか。$W=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus u_n$ $u_n=1\ (n\neq 0)$, $u_0=-1$ として $U=WS$ とする。この時、$f=(S+U)f\in\mathcal{S}\mathfrak{M}$ となる 又 $(S-U)f=e_0$ であるから、任意の $g=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n\in H^2$ に対しては、$g=\alpha_0 e_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ $=(S-U)(\alpha f)+S(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n+1}e_n)\in\mathcal{S}\mathfrak{M}$。

我々は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\subsetneqq\mathfrak{M}$ なる non-reducing な不変部分空間を調べる事にする。この様な部分空間を simply な不変部分空間といおう。将来の問題としては、$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$ なる場合に

ついても $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneq \mathfrak{M}$ となる部分空間との関係において $\mathfrak{M}$ の構造を調べていかねばならない。ここで $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneq \mathfrak{M}$ ならば $[\mathcal{S}^2\mathfrak{M}] \subsetneq [\mathcal{S}\mathfrak{M}]$、一般に $[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}] \subsetneq [\mathcal{S}^{n-1}\mathfrak{M}]$ となるだろうか。次の例によってこの事は成り立たない事を示そう。

<u>1-7 例</u>. $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$　$\mathcal{S} = \{S\otimes 1,\ S\otimes S\}$　$\mathfrak{M} = \{f \in \mathfrak{H} \mid (n, m) \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3$ ならば $\hat{f}(n, m) = 0\}$　ここで $L_2 = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \geq m\}$　$L_3 = \{(-2, -1)\}$



$\mathfrak{M} \ominus [\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \{f \in \mathfrak{H} \mid (n, m) \neq (-2, -1)$ ならば $\hat{f}(n, m) = 0\}$　しかし $[\mathcal{S}^2\mathfrak{M}] = \{f \in \mathfrak{H} \mid (n, m) \notin L_1 \cup L_2$ ならば $\hat{f}(n, m) = 0\} = [\mathcal{S}\mathfrak{M}]$

更に $\mathfrak{M} \ominus [\mathcal{S}\mathfrak{M}] \neq \{0\}$, $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \ominus [\mathcal{S}^2\mathfrak{M}] \neq \{0\}$ であれば、$\mathcal{S}(\mathfrak{M} \ominus [\mathcal{S}\mathfrak{M}]) = [\mathcal{S}\mathfrak{M}] \ominus [\mathcal{S}^2\mathfrak{M}]$ であろうか。これも又成り立たない事を次の例によって示そう。

<u>1-8 例</u>　$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$　(1) $\mathcal{S} = S \otimes A$, ここで $A = \{S^n\}_{n=0}^{\infty}$

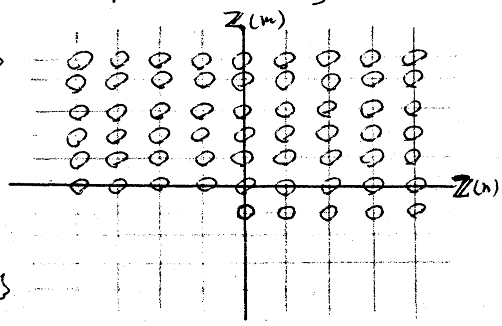
$\mathfrak{M} = \{f \in \mathfrak{H} \mid (n, m) \notin L_1 \cup L_4$ ならば $\hat{f}(n, m) = 0\}$ ここで

$L_4 = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \geq 0,\ m = -1\}$

$\mathfrak{M} \ominus [\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \{f \in \mathfrak{H} \mid (n, m) \neq (0, -1)$ ならば $\hat{f}(n, m) = 0\}$

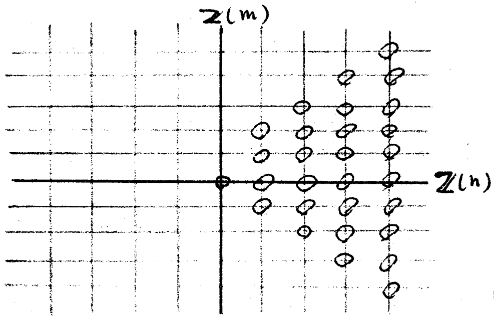
$[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \ominus [\mathcal{S}^2\mathfrak{M}] = \{f \in \mathfrak{H} \mid (n, m) \neq (1, -1)$ ならば $\hat{f}(n, m) = 0\}$

$\mathcal{S}(\mathfrak{M} \ominus [\mathcal{S}\mathfrak{M}]) = \{f \in \mathfrak{H} \mid (n, m) \notin L_5$ ならば $\hat{f}(n, m) = 0\}$



ここで $L_5=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid n=1,\ m\geq -1\}$。

(2). $\mathcal{S}=S\otimes A$, $A=\{1, S, S^*\}$ $\mathcal{M}=\{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\notin L_6\cup L_7$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$ ここで $L_6=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid n\geq 0, -m\leqq n\leqq m\}$ $L_7=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid n\geqq 1,\ m=n+1\}$



$\mathcal{M}\ominus[\mathcal{S}\mathcal{M}]=\{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\neq(0,0),(1,2)$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$

$[\mathcal{S}\mathcal{M}]\ominus[\mathcal{S}^2\mathcal{M}]=\{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\neq(1,-1),(1,0)$ $(1,1),(2,3)$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$

$\mathcal{S}(\mathcal{M}\ominus[\mathcal{S}\mathcal{M}])=\{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\neq(1,-1),(1,0)\ (1,1),(2,1),(2,2)$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$

$\mathcal{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間で $\bigcap_{n=0}^{\infty}[\mathcal{S}^n\mathcal{M}]=\{0\}$ であるとしよう。この時 $\mathcal{M}$ は pure であるという。$\mathcal{M}$ が pure であれば $[\mathcal{S}^{n+1}\mathcal{M}]\subsetneqq[\mathcal{S}^n\mathcal{M}]$ である。実際、$[\mathcal{S}^{n_0+1}\mathcal{M}]=[\mathcal{S}^{n_0}\mathcal{M}]$ であったとすれば、任意の k について $[\mathcal{S}^{n_0+k}\mathcal{M}]=[\mathcal{S}^{n_0}\mathcal{M}]$ であるから $\mathcal{M}$ が pure である事に反する。

$$\mathcal{M}_n=[\mathcal{S}^{n+1}\mathcal{M}]\ominus[\mathcal{S}^n\mathcal{M}]$$

とすれば $\mathcal{M}=\mathcal{M}_0\oplus\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2\oplus\cdots$ である。

<u>1-9 定理</u> $W(\mathcal{S})$ は次の(1), (2) をみたしているとする。

(1) $W(\mathcal{S})$ は群である。

(2) $S^*W(\mathcal{S})S\subset W(\mathcal{S})$

この時任意の pure な $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ に対して

$$\mathfrak{M}_n=[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}_0]\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

となる。又 $W(\mathcal{S})$ が次の条件 (2') をみたせば、$\mathfrak{M}_n=S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ $(n=1,2,\cdots)$ となる

(2') $S^*W(\mathcal{S})S=W(\mathcal{S})$

[証明] 明らかに $\mathcal{S}\mathfrak{M}_0\subset\mathcal{S}\mathfrak{M}$ である。$x_0\in\mathfrak{M}_0$, $y\in\mathfrak{M}$, $W_1, W_2, W_3\in W(\mathcal{S})$ に対して

$$\langle W_1S(x_0),\ W_3SW_2S(y)\rangle=\langle x_0,\ S^*W_1^*W_3SW_2S(y)\rangle=0$$

従って $\mathcal{S}\mathfrak{M}_0$ は $\mathfrak{M}_1=[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\ominus[\mathcal{S}^2\mathfrak{M}]$ に含まれる。同様にして $\mathcal{S}\mathfrak{M}_n\subset\mathfrak{M}_{n+1}$ となる。$\cap[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]=\{0\}$ であるから

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{M}_2\oplus\cdots$$

と分解される。従って

$$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=[\mathcal{S}\mathfrak{M}_0]\oplus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_1]\oplus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_2]\oplus\cdots$$

となって $\mathfrak{M}_0$ の定義より

$$\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}_0\oplus(\mathfrak{M}_1\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_0])\oplus(\mathfrak{M}_2\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_1])\oplus\cdots$$

である。従って $\mathfrak{M}_n=[\mathcal{S}\mathfrak{M}_{n-1}]$ $(n\geq 1)$ とならねばならない。又、$W(\mathcal{S})S\subset SW(\mathcal{S})$ ((2)) であるから、$\mathfrak{M}_0=[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}_0]\subset S^n[W(\mathcal{S})^n\mathfrak{M}_0]=S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ ($W(\mathcal{S})$ は群)、更に、$[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]$ と直交している。更に $W(\mathcal{S})S=SW(\mathcal{S})$ であれば $\mathfrak{M}_n=S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ $(n\geq 1)$ である。

我々は$[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneq \mathfrak{M}$なる不変部分空間を調べているのであるが、必ずしも pure でないこの様な不変部分空間の構造について調べてみよう。

1-10 定理　$W(\mathcal{S})$は次の条件をみたしているとしよう。

(1) $W(\mathcal{S})$は群である。

(2) $S^*W(\mathcal{S})S \subset W(\mathcal{S})$。

この時、任意の simply な$\mathcal{S}$の不変部分空間は次の様に分解される。

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p \oplus \mathfrak{M}_r \qquad (\mathfrak{M}_p \neq \{0\})$$

ここで$\mathfrak{M}_p$は pure な$\mathcal{S}$の不変部分空間で$\mathfrak{M}_r$は reducing な$\mathcal{S}$の不変部分空間である。

[証明]　$\mathfrak{M}_r = \bigcap_{n=1}^{\infty}[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]$, $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}\ominus\mathfrak{M}_r$としよう。
$S^*W(\mathcal{S})^*W(\mathcal{S})S \subset W(\mathcal{S})$であるから、$\mathcal{S}^*[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}] \subset [\mathcal{S}^{n-1}\mathfrak{M}]$である。従って$\mathfrak{M}_r$は$\mathcal{S}$の reducing な不変部分空間である。又$\mathfrak{M}_p$は$\mathcal{S}$の不変部分空間となる。更に、$\mathfrak{M}_p$は pure である。実際$(\mathfrak{M}_p)_{+\infty} = \bigcap_{n\in Z}[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}_p]$は$\mathfrak{M}_p$の部分空間であるが$\mathfrak{M}_r = \bigcap_{n\in Z}[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]$にも含まれるわけだから、$(\mathfrak{M}_p)_{+\infty} = \{0\}$である。

$\mathcal{S}$の不変部分空間$\mathfrak{M}$について$\mathfrak{M}_{-\infty}$を$\mathfrak{M}$を含む最小の reducing な部分空間としよう。$\mathcal{S} = W(\mathcal{S})\cdot S$に対して、$\widetilde{W(\mathcal{S})} = \bigcup_{n\in Z} S^n\widetilde{W(\mathcal{S})}S^{-n}$（ここで$\widetilde{W(\mathcal{S})}$は$W(\mathcal{S})$によって生成

された群）とすれば $\widehat{\mathcal{S}} = \widehat{W(\mathcal{S})} \cdot S$ として $\mathfrak{M}_{-\infty} = [\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{S}}^n \mathfrak{M}]$ となる。従って $S^* W(\mathcal{S}) S = W(\mathcal{S})$ であれば $\mathfrak{M}_{-\infty} = [\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}^n \mathfrak{M}]$ である。

<u>1-11 定理</u>　$W(\mathcal{S})$ は定理 1-9 (10) の条件 (1), (2) をみたしているとしよう。この時、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ に対して $\mathfrak{H}$ は次の様に分解される。

(i)　$\mathfrak{H} = (\mathfrak{M}_p)_{-\infty} \oplus \mathfrak{M}_r \oplus \mathfrak{M}_c$

ここで $(\mathfrak{M}_p)_{-\infty} = \mathfrak{M}_p \oplus \mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ は $\mathcal{S}^*$ の不変部分空間である。(pure であるとは限らない)，更に $S^* W(\mathcal{S}) S^* = W(\mathcal{S})$ であれば

(ii)　$(\mathfrak{M}_p)_{-\infty} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus S^n [W(\mathcal{S}) \mathfrak{M}_0]$

となり $\mathfrak{N}$ は $\mathcal{S}^*$ に関して pure である。

〔証明〕　1-11 より $\mathfrak{M}_r$ は *reducing* な部分空間であるから、$\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_r$ も *reducing* であってかつ $\mathfrak{M}_p$ を含んでいるから、$(\mathfrak{M}_p)_{-\infty} \subset \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_r$ である。又、明らかに $\mathfrak{M}_{-\infty} = (\mathfrak{M}_p)_{-\infty} \oplus \mathfrak{M}_r$ であって $\mathfrak{M}_c = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_{-\infty}$ とすればよい。ここで $\mathfrak{M}$ を *pure* であると仮定しよう。$S^* W(\mathcal{S}) S^* = W(\mathcal{S})$ であれば $\mathfrak{M}_n = S^n [W(\mathcal{S}) \mathfrak{M}_0]$ $(n \in \mathbb{Z})$ となるが（1-10, 定理）更に $[\mathcal{S}^n \mathfrak{M}_0] = [S^n W(\mathcal{S}) \mathfrak{M}_0]$ は互いに直交している。実際 $x_0, y_0 \in \mathfrak{M}_0$，$W_1, W_2 \in W(\mathcal{S})$，$n, m \in \mathbb{Z}$ $(n < m)$ に対して $\langle S^n W_1(x_0), S^m W_2(y_0) \rangle = \langle x_0, W_1 S^{m-n} W_2(y_0) \rangle$ $= \langle x_0, W_1 (S^{m-n} W_2 S^{n-m}) S^{m-n}(y_0) \rangle = 0$。従って

$$\mathcal{S}^n \mathfrak{M} = [\mathcal{S}^n \mathfrak{M}_0] \oplus [\mathcal{S}^n S W(\mathcal{S}) \mathfrak{M}_0] \oplus [\mathcal{S}^n \cdot S^2 W(\mathcal{S}) \mathfrak{M}_0] \oplus \cdots$$

$= S^n[W(\mathcal{S})m_0] \oplus S^{n+1}[W(\mathcal{S})m_0] \oplus S^{n+2}[W(\mathcal{S})m_0] \oplus \cdots$

結局、$m_{-\infty} = [\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}^n m] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus S^n[W(\mathcal{S})m_0]$ である。

1-12 系　u を E 上のユニタリ作用素とする。$\sigma(u) = \{e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\}$ とする。$A=\{1, u\}$ とし、$\mathcal{S} = S\otimes A$ とする。この時、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間に対して 1-11 の $\overline{多}$ の分解が得られる。

[証明]　$e^{i\theta_1} \neq e^{i\theta_2}$ として充分である。この時、A の線型閉包 $\mathrm{lin}\,A$ は $u = e^{i\theta_1}e_1 + e^{i\theta_2}e_2$ のスペクトル射影子 e_1, e_2 を含んでいる。従って $\mathrm{lin}\,A$ は $v = e_1 - e_2$ を含んでいて $v^2 = 1$ である。$B = \{1, v\}$、$\mathcal{S}' = S\otimes B$ とすれば、B は群、即ち $W(\mathcal{S}) = 1\otimes B$ は群でかつ $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$。又 $\mathrm{lin}\,\mathcal{S} = S\otimes \mathrm{lin}\,A = S\otimes \mathrm{lin}\,B = \mathrm{lin}\,\mathcal{S}'$ であるので $[\mathcal{S}m] = [\mathcal{S}'m]$ である。従って $\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造は $\mathcal{S}'$ のそれと同じである。

1-12 系より直ちに次の事が言える。

1-13 系　$\dim E \leq 2$ としよう。u を E 上のユニタリ作用素とする。$A=\{1, u\}$ $\mathcal{S} = S\otimes A$ とする。この時、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間について 1-11 の定理が成り立つ。

上の系より $\dim E \leq 2$ の時には ~~$\mathcal{S} = \{\ldots\}$ の不変部~~

二つの $\mathfrak{H}$ 上のシフト作用素 S_1, S_2 に対して $\mathcal{S}=\{S_1, S_2\}$ の不変部分空間の構造は決定されたといってよい。

今まで $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$ となる $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ の構造を調べてきたが、今後は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$ なる条件と $\mathfrak{M}$ が non-reducing である事が同値になる様な $\mathcal{S}$ の条件を与えてみよう。

<u>1-14. 定理</u> $W(\mathcal{S})$ は次の条件をみたすとする。

(1) ある $k \geqq 1$ に対して $W(\mathcal{S})^k$ は群となる。

(2) $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$

この時，$\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$ である事と non-reducing である事は同値

[証明] $\mathfrak{M}$ を $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ となる $\mathcal{S}$ の不変部分空間としよう。$W(\mathcal{S})^k$ は群であるから，任意の $n \geqq 0$ について $W(\mathcal{S})^{k+n} = W(\mathcal{S})^k$ となり，$W(\mathcal{S})^k$ は $W(\mathcal{S})^*$ を含む。$W(\mathcal{S})S = SW(\mathcal{S})$ という条件により，任意の n について，$\mathcal{S}^n = W(\mathcal{S})^n \cdot S^n$ となる。従って $\mathcal{S}^{k+1}\mathfrak{M} = W(\mathcal{S})^{k+1}S^{k+1}\mathfrak{M} = W(\mathcal{S})^k S^{k+1}\mathfrak{M} = SW(\mathcal{S})^k S^k \mathfrak{M} = S \cdot \mathcal{S}^k \mathfrak{M}$。$[\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ であるから $[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ $(\forall n \geqq 1)$ となり $\mathfrak{M} = [\mathcal{S}^{k+1}\mathfrak{M}] = S \cdot [\mathcal{S}^k\mathfrak{M}] = S\mathfrak{M}$ 即ち，$S^*\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ である。更に $\mathcal{S}^*\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ である。実際，$\mathcal{S}^*\mathfrak{M} = S^*W(\mathcal{S})^*\mathfrak{M} \subset S^*W(\mathcal{S})^k\mathfrak{M} = S^*S^{*k}W(\mathcal{S})^k S^k\mathfrak{M} = S^{*k+1}\mathcal{S}^k\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$。

1-14 の条件(1).(2) を落とせば一般には成り立たない。1-5 で $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$，1-6 で $W(\mathcal{S})$ が群という条件の元でそれぞれ反例を出している。

1-15 系　$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T})\otimes \mathfrak{K}$。$u$ を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素で $u^k = 1$ とする。$\mathcal{S} = \{S\otimes 1, S\otimes u\}$ とすれば，任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ について $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneq \mathfrak{M}$ と $\mathcal{S}^*\mathfrak{M} \not\subset \mathfrak{M}$ は同値である。

最後に $\mathcal{S}$ から生成された環 $A(\mathcal{S})$ について考えてみよう。$W(\mathcal{S})$ が群で $S^*W(\mathcal{S})S \subset W(\mathcal{S})$ であれば $A(\mathcal{S})$ は $\{T \mid T = SW_1 + S^2W_2 + \cdots + S^nW_n \quad W_i \in W(\mathcal{S}) \quad 1\le i\le n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ の線型閉包である。$W(\mathcal{S})^\sim = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S^n W(\mathcal{S}) S^{*n}$ とすれば $S^*W(\mathcal{S})^\sim S = W(\mathcal{S})^\sim$ となり $M(\mathcal{S})$ は $\{T \mid T = W_{-m}S^{*m} + \cdots + W_0 + \cdots + W_nS^n,\ m, n\in\mathbb{Z}\}$ の線型閉包である。ここで $A(\mathcal{S})$ と subdiagonal [3],[4] との関係について考えてみよう。$\mathfrak{H} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus \mathfrak{K}_n$ に対して，E_n を $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{K}_n$ への射影子とする。$U_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int}E_n$ $(t\in\mathbb{R})$ は一径数ユニタリ群で $\alpha_t = U_t \cdot U_t^*$ は $B(\mathfrak{H})$ 上の $*$-同型写像で，任意の $\mathcal{S}$ について $M(\mathcal{S})$ は α_t-不変である。なぜなら，$\alpha_t(S) = e^{it}S$，$W\in W(\mathcal{S})$ については $\alpha_t(W) = W$ である。ここで $x\in M(\mathcal{S})$ に対して Arveson Spectrum $Sp(x)$ を考えれば，$H^\infty(\alpha) = \{x\in M(\mathcal{S}) \mid Sp(x)\subset[0,\infty)\}$ は subdiagonal 環である。 $A(\mathcal{S})$との関係で言えば、 $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$ のとき $H^\infty(\alpha) = A(\mathcal{S})$ となり、 $S^*W(\mathcal{S})S \subsetneqq W(\mathcal{S})$ のときは $H^\infty(\alpha) \supsetneqq A(\mathcal{S})$ である。 Loebl Muhly [4. Th V. 2] によれば一般の subdiagonal 環に対して 1-11 の 5 の分解(i)はすでに証明されている。我々の目標は subdiagonal 環における不変部分空間の構造を調べる事ではなく あるシフト作用素の族に於ける不変部分空間の構造を $\mathcal{S}$ との関係において調べる事である。

参 考 文 献

[1] P. R. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, J. Reine Angew. Math., 208 (1961), 102-112.

[2] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic Press, London, New York, 1964.

[3] S, Kawamura, J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29 (1977), 73-90.

[4] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann Algebras, J. ~~Math~~ Funct. Anal., 29 (1978), 214-252,